***Exercice* 1**

Compte tenu de la charge répartie $q = -\gamma A$, la forme forte du problème s'écrit

$$u(x) \in C^2([0,\, h]) \;:\; -EA(\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}x^2) \;=\; -\gamma A \qquad\qquad 0 < x < h$$

avec les conditions de bord

$$u(0) \;=\; 0$$

$$EA(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\big|_{x=h} \;=\; 0$$

La formulation intégrale associée a pour expression

$$\int_0^h [EA(\mathrm{d}^2u\,/\,\mathrm{d}x^2) - \gamma A]\,\delta u\mathrm{d}x \;=\; 0 \qquad \forall\,\delta u$$

où δu dénote le déplacement longitudinal virtuel. Par intégration par parties, on trouve

$$\int_0^h EA(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}\delta u/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x - [EA(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\delta u]\Big|_0^h \;=\; \int_0^h (-\gamma A)\,\delta u\mathrm{d}x \qquad \forall\,\delta u$$

En vertu de la contrepartie virtuelle $\delta u(0) = 0$ de la condition aux limites essentielle (déplacement virtuel cinématiquement admissible) et compte tenu de la condition de bord naturelle, cette expression devient

$$\int_0^h EA(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}\delta u/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^h (-\gamma A)\,\delta u\mathrm{d}x \qquad \forall\,\delta u$$

de sorte que la forme faible du problème a pour expression

$$u \in \mathcal{U} \;:\; \int_0^h EA(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}\delta u/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^h (-\gamma A)\,\delta u\mathrm{d}x \qquad \forall\,\delta u \;\in\; \mathcal{V}$$

avec les classes de fonctions suivantes

$$\mathcal{U} \;=\; \{u(x)\;\big|\; u(x) \in H^1(]0,\, h[);\, u(0) = 0\}$$

$$\mathcal{V} \;=\; \{\delta u(x)\;\big|\; \delta u(x) \in H^1(]0,\, h[);\, \delta u(0) = 0\}$$

La forme faible approchée s'écrit

$$u^h \in \mathcal{U}^h \subset \mathcal{U} \;:\; \int_0^h EA(\mathrm{d}u^h/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}\delta u^h/\mathrm{d}x)\mathrm{d}x \;=\; \int_0^h (-\gamma A)\delta u^h\mathrm{d}x \qquad \forall\,\delta u^h \;\in\; \mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$$

où u^h et δu^h sont les déplacements approchés réel et virtuel et où $\mathcal{U}^h$ et $\mathcal{V}^h$ sont les sous-espaces respectifs de $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$.

Dans la méthode de Galerkin, les approximations u^h et δu^h sont choisies sous les formes d'ordre n suivantes

$$u^h(x) \;= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i(x)$$

$$\delta u^h(x) \;= \sum_{i=1}^{n} \delta\alpha_i h_i(x)$$

dans lesquelles les grandeurs $h_i(x)$ sont les fonctions de forme et les variables α_i et $\delta\alpha_i$ sont les inconnues discrètes réelles et virtuelles. En portant ces approximations dans la forme faible approchée, on obtient le système ci-après de n équations à n inconnues

$$\sum_{j=1}^{n} k_{ij}\alpha_j = r_i \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

Dans lequel les composantes k_{ij} de la matrice de rigidité et les éléments r_i du vecteur des forces s'écrivent

$$k_{ij} = \int_0^h EA(\mathrm{d}h_i/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}h_j/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x$$

$$r_i = \int_0^h h_i(-\gamma A)\,\mathrm{d}x$$

En adoptant une approximation harmonique à deux paramètres respectant la condition aux limites essentielle en $x = 0$

$$u^h(x) = \alpha_1 h_1(x) + \alpha_2 h_2(x) \qquad h_1(x) = \sin\frac{\pi x}{2h} \qquad h_2(x) = \sin\frac{3\pi x}{2h}$$

et en portant ces fonctions dans l'expression des termes de la matrice de rigidité d'ordre 2, on trouve

$$k_{11} = \int_0^h EA(\mathrm{d}h_1/\mathrm{d}x)^2\,\mathrm{d}x = \pi^2 EA/(8h)$$

$$k_{12} = k_{21} = \int_0^h EA(\mathrm{d}h_1/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}h_2/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$k_{22} = \int_0^h EA(\mathrm{d}h_2/\mathrm{d}x)^2\,\mathrm{d}x = 9\pi^2 EA/(8\mathrm{h})$$

De même, les composantes du vecteur des forces valent

$$r_1 = \int_0^h h_1(-\gamma A)\,\mathrm{d}x = -2\gamma Ah/\pi$$

$$r_2 = \int_0^h h_2(-\gamma A)\,\mathrm{d}x = -2\gamma Ah/(3\pi)$$

On forme ainsi le système d'équations suivant

$$\frac{\pi^2 EA}{8h}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{Bmatrix} = \frac{-2\gamma Ah}{3\pi}\begin{Bmatrix}3\\ 1\end{Bmatrix}$$

dont les solutions s'écrivent

$$\alpha_1 = -16\gamma h^2/(\pi^3 E) \qquad \alpha_2 = -16\gamma h^2/(27\pi^3 E)$$

Le déplacement longitudinal et l'écrasement total de la barre valent par conséquent

$$u^h(x) = \frac{-16\gamma h^2}{27\pi^3 E}\left(27\sin\frac{\pi x}{2h} + \sin\frac{3\pi x}{2h}\right) \qquad u^h(h) = \frac{-416\gamma h^2}{27\pi^3 E} = -0{,}497\frac{\gamma h^2}{E}$$

Comme la valeur exacte de l'écrasement a pour valeur

$$u(h) = \frac{-\gamma h^2}{2E}$$

l'erreur relative sur le déplacement maximal s'élève à – 0.6%.

***Exercice* 2**

La forme faible approchée du problème est identique à celle trouvée précédemment

$$u^h \in \mathcal{U}^h \subset \mathcal{U} \ : \ \int_0^h EA(\mathrm{d}u^h/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}\delta u^h/\mathrm{d}x)\mathrm{d}x \ = \ \int_0^h (-\gamma A)\delta u^h \mathrm{d}x \qquad \forall \delta u^h \in \mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$$

où u^h et δu^h sont les déplacements approchés réel et virtuel et où $\mathcal{U}^h$ et $\mathcal{V}^h$ sont les sous-espaces respectifs de $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$. Rappelons que h dénote la hauteur de la colonne, A est l'aire de sa section et E représente son module d'élasticité E, tandis que γ est son poids spécifique.

Dans l'approche globale des éléments finis, les approximations u^h et δu^h ont les allures

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n q_i h_i(x)$$

$$\delta u^h(x) = \sum_{i=1}^n \delta q_i h_i(x)$$

dans lesquelles les grandeurs $h_i(x)$ sont les fonctions de forme, mais cette fois à support compact, et les variables q_i et δq_i sont les déplacements nodaux réels et virtuels. En portant ces approximations dans la formulation faible approchée, on obtient le système ci-après de n équations à n inconnues

$$\sum_{j=1}^n k_{ij} q_j = r_i \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

où les composantes k_{ij} de la matrice de rigidité et les éléments r_i du vecteur des forces restent écrites sous les formes

$$k_{ij} = \int_0^h EA(\mathrm{d}h_i/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}h_j/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x$$

$$r_i = \int_0^h h_i(-\gamma A)\,\mathrm{d}x$$

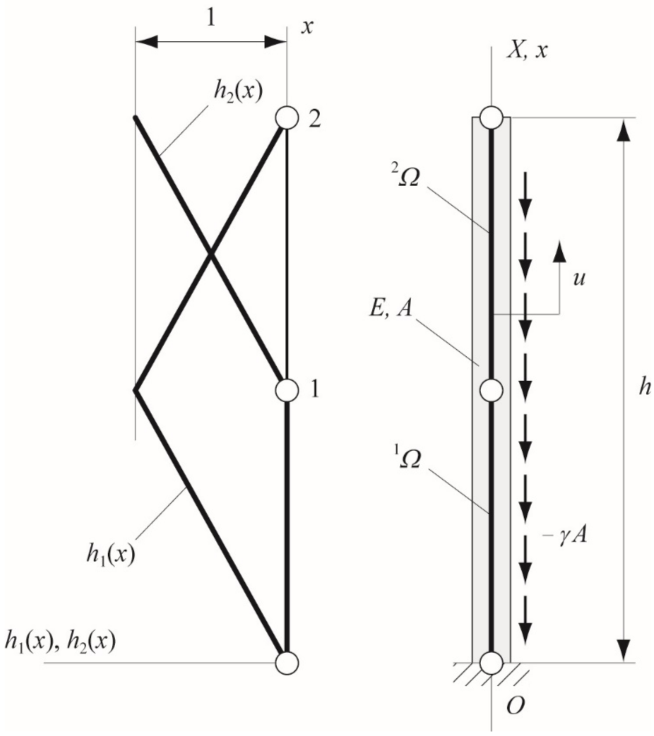
En choisissant un réseau à deux éléments finis à deux nœuds chacun, le déplacement est approché par deux fonctions linéaires par morceaux à support compact, qui respectent la condition aux limites essentielle en $x = 0$ (point nodal bloqué),

$$u^h(x) \ = \ q_1 h_1(x) + q_2 h_2(x)$$

$$\begin{aligned} h_1(x) \ &= \ \frac{2x}{h} && 0 < x < h/2 \\ &= \ 2\left(1 - \frac{x}{h}\right) && h/2 < x < h \\ h_2(x) \ &= \ 0 && 0 < x < h/2 \\ &= \ \frac{2x}{h} - 1 && h/2 < x < h \end{aligned}$$

En plaçant ces fonctions dans l'expression des composantes de la matrice de rigidité, on obtient

$$k_{11} \ = \ \int_0^h EA(\mathrm{d}h_1/\mathrm{d}x)^2\,\mathrm{d}x \ = \ \int_0^{h/2} EA(2/h)^2\,\mathrm{d}x + \int_{h/2}^h EA(-2/h)^2\,\mathrm{d}x \ = \ 4EA/h$$



$$k_{12} = k_{21} = \int_0^h EA(\mathrm{d}h_1/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}h_2/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x = \int_{h/2}^h EA(2/h)(-2/h)\,\mathrm{d}x = -2EA/h$$

$$k_{22} = \int_0^h EA(\mathrm{d}h_2/\mathrm{d}x)^2\,\mathrm{d}x = \int_{h/2}^h EA(2/h)^2\,\mathrm{d}x = 2EA/h$$

De même, les termes du vecteur des forces s'écrivent

$$r_1 = \int_0^h h_1(-\gamma A)\,\mathrm{d}x = \int_0^{h/2} (2x/h)(-\gamma A)\,\mathrm{d}x + \int_{h/2}^h 2(1-x/h)(-\gamma A)\,\mathrm{d}x = -\gamma Ah/2$$

$$r_2 = \int_0^h h_2(-\gamma A)\,\mathrm{d}x = \int_{h/2}^h (2x/h-1)(-\gamma A)\,\mathrm{d}x = -\gamma Ah/4$$

On obtient ainsi le système d'équations d'ordre 2 suivant

$$\frac{2EA}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \frac{-\gamma Ah}{4}\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

dont les solutions s'écrivent

$$q_1 = -3\gamma h^2/(8E) \qquad q_2 = -\gamma h^2/(2E)$$

L'écrasement total de la barre, correspondant au déplacement du nœud 2, vaut donc

$$u^h(h) \equiv q_2 = \frac{-\gamma h^2}{2E}$$

qui est la valeur exacte.

Il est possible de montrer qu'en raison de la nature particulière du problème, les deux solutions nodales sont exactes (superconvergence) malgré la simplicité de l'approximation u^h linéaire par morceaux. On notera de plus que l'approche globale, adoptée ici, de la méthode des éléments finis est assez laborieuse et tire mal profit du caractère compact des fonctions de forme et de la nature répétitive de la discrétisation, à l'opposé de l'approche locale du procédé.